Université Sultan Moulay Slimane
Faculté Polydisciplinaire
Khouribga

A. U. 2020-2021
Filière: SMA/SMI
Module: Analyse 1
Responsable: N. Mrhardy

TD n°2: Les suites numériques

Exercice 1. En utilisant la définition, montrer que

$$(1) \ \left(\frac{1}{2^n}\right)_{n\geq 0} \text{ converge vers } 0 \qquad (2) \ (\ln(n^2+1))_{n\geq 0} \text{ tend vers } +\infty$$

Exercice 2. Soit un réel $\alpha \in]0,1[$ et une suite $(u_n)_n$ convergeant vers une limite $l \in \mathbb{R}$.

(1) Montrer que si $(\varepsilon_n)_n$ est une suite convergeant vers 0 alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \alpha^k \varepsilon_{n-k} = 0$

(2) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \alpha^k u_{n-k} = \dfrac{l}{1-\alpha}$

Exercice 3. Soit $u_0 > 0$ et (u_n) la suite définie par : $u_{n+1} = \sqrt{\sum\limits_{k=0}^{n} u_k}$

(1) Trouver une relation de récurrence simple entre u_{n+1} et u_n.
(2) Montrer que la suite (u_n) est croissante.
(3) Montrer que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$.

Exercice 4. On se propose d'étudier la suite définie par:

$$u_0 = 2 \text{ et } u_{n+1} = 0.8u_n + 2, \ n \geq 1$$

On considère la suite de terme général $v_n = u_n + c$

(1) Trouver $c \in \mathbb{R}$ tel que la suite de terme général v_n soit géométrique.
(2) Exprimer u_n en fonction de n et calculer sa limite.
(3) Calculer $T_n = v_0 + v_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots + v_n$ et $S_n = u_0 + u_1 + \ldots\ldots.. + u_n$ en fonction de n .
(4) Calculer les limites des suites $(T_n)_{n\geq 0}$ et $(S_n)_{n\geq 0}$.

Exercice 5. Etudier les suites suivantes;

1. $u_n = \dfrac{2n+(-1)^n}{5n+(-1)^{n+1}}$
2. $u_n = \dfrac{n!}{n^n}$
3. $u_n = \dfrac{E((n+\frac{1}{2})^2)}{E((n-\frac{1}{2})^2)}$
4. $u_n = \sqrt[n]{2+(-1)^n}$
5. $u_n = \sin(\dfrac{2n\pi}{3})$
6. $u_n = n\cos n + n^2$
7. $u_n = (-1)^n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$
8. $u_n = \dfrac{E(nx)}{x}$,
9. $u_n = \dfrac{1}{n^2}\sum\limits_{k=1}^{n} E(kx)$

Exercice 6. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle, on considère la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par:

$$s_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u_k = \frac{u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1}}{n}$$

$(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est appelée suite des sommes de césaro associée à $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(1) Montrer que si $\lim u_n = l \in \mathbb{R}$, la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et a pour limite l. Réciproque ?
(2) Application: Soit (u_n) une suite de réels on suppose que $(u_{n+1}-u_n)\longrightarrow \lambda$. Montrer que $(\frac{u_n}{n}) \longrightarrow \lambda$.

Exercice 7. On se propose de démontrer que le nombre e est un nombre irrationnel. Pour cela, on suppose que e est un nombre rationnel, c'est-à-dire qu'il existe des entiers p et q premiers entre eux tels que $e=\frac{p}{q}$.
On considère les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies pour $n\geq 1$, par
$$u_n = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!} \quad \text{et} \quad v_n = u_n+\frac{1}{n!}.$$
(1) Montrer que (u_n) et (v_n) sont strictement monotones.
(2) En déduire que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite.
(3) On admet que la limite commune de (u_n) et (v_n) est le nombre réel e. Montrer que
$$q!u_q < p\times(q-1)! < q!u_q+1$$
(4) En déduire que e n'est pas rationnel.

Exercice 8. On définie par récurrence $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ en posant: $u_0=3,\ v_0=4$, et si $n\geq 0$:
$$u_{n+1}=\frac{v_n+u_n}{2},\ v_{n+1}=\frac{u_{n+1}+v_n}{2}$$
(1) On pose $w_n=v_n-u_n,\ \forall n\geq 0$. Montrer que $(w_n)_{n\geq 0}$ est une suite géométrique positive et calculer sa limite.
(2) Démontrer que ces deux suites sont adjacentes. Que peut-on en déduire ?
(3) On considère à présent la suite $(t_n)_n$ définie, pour tout $n\in\mathbb{N}$, par: $t_n=\frac{u_n+2v_n}{3}$. Montrer que la suite $(t_n)_n$ est constante. En déduire la limite des suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$.

Exercice 9.
(1) Soit (x_n) une suite réelle telle que les suites extraites (x_{2n}) et (x_{2n+1}) tendent vers la même limite $l\in\overline{\mathbb{R}}$. Montrer qu'il en est de même pour la suite(x_n).
(2) Soit (x_n) une suite réelle telle que les suites extraites (x_{2n}) et (x_{2n+1}) et (x_{3n}) soient convergentes. Montrer que la suite(x_n) est convergente.

Exercice 10. Soit (u_n) une suite pour laquelle il existe un nombre $\lambda\in[0,1[$, et un nombre réel positive k tels que, pour tout entier n
$$|u_{n+1}-u_n|\leq k\lambda^n.$$
Montrer que la suite (u_n) converge.
Exercice 11. Soit $(u_n)_n$ la suite définie par $u_0=2$ et $u_{n+1}=\frac{1}{2}(u_n+\frac{2}{u_n})$ pour tout entier n.
(1) Montrer que pour tout n on a : $u_n>0$ et $u_n^2>2$.
(2) Montrer que $(u_n)_n$ converge et calculer sa limite.
(3) L'ensemble $\mathbb{Q}$ est-il complet? (on peut remarquer que la suite $(u_n)_n$ est à valeur dans $\mathbb{Q}$)